Aula 2

Probabilidade

Profª. Drª. Juliana Garcia Cespedes

Introdução

- Até agora vimos que a análise de um conjunto de dados por meio de técnicas numéricas nos permite calcular medidas de posição (média, mediana, moda) e medidas de dispersão (variância e desvio padrão).

- Poderemos caracterizar uma massa de dados, com o objetivo de organizar e resumir informações.

- Essas medidas são chamadas de **estimativas** associadas a **populações** das quais os dados foram extraídos na forma de **amostras.**

Modelos probabilísticos

- Agora estudaremos os chamados **modelos probabilísticos**.
- São modelos que permitem, sem a observação direta do **fenômeno aleatório**, reproduzir de maneira razoável a distribuição de frequências.

Definição: **Fenômeno aleatório** é a situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Ex: Condições climáticas do próximo domingo.

Taxa de inflação do próximo mês.

Em situações como estas, modelos probabilísticos podem ser estabelecidos para quantificar as incertezas das diversas ocorrências.

Modelos probabilísticos

- Exemplos de experimentos aleatórios:

1) Jogue uma moeda 4 vezes e observe o número de caras.

2) Jogue uma moeda 4 vezes e observe a sequência obtida de caras e coroas.

3) Uma lâmpada é fabricada. Em seguida é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar.

4) Um lote de 10 peças contem 3 defeituosas. As peças são retiradas uma a uma (sem reposição) até que a última peça defeituosa seja encontrada. O número total de peças retiradas do lote é contado.

5) Peças são fabricadas até que 10 peças perfeitas sejam produzidas. O número total de peças fabricadas é contado.

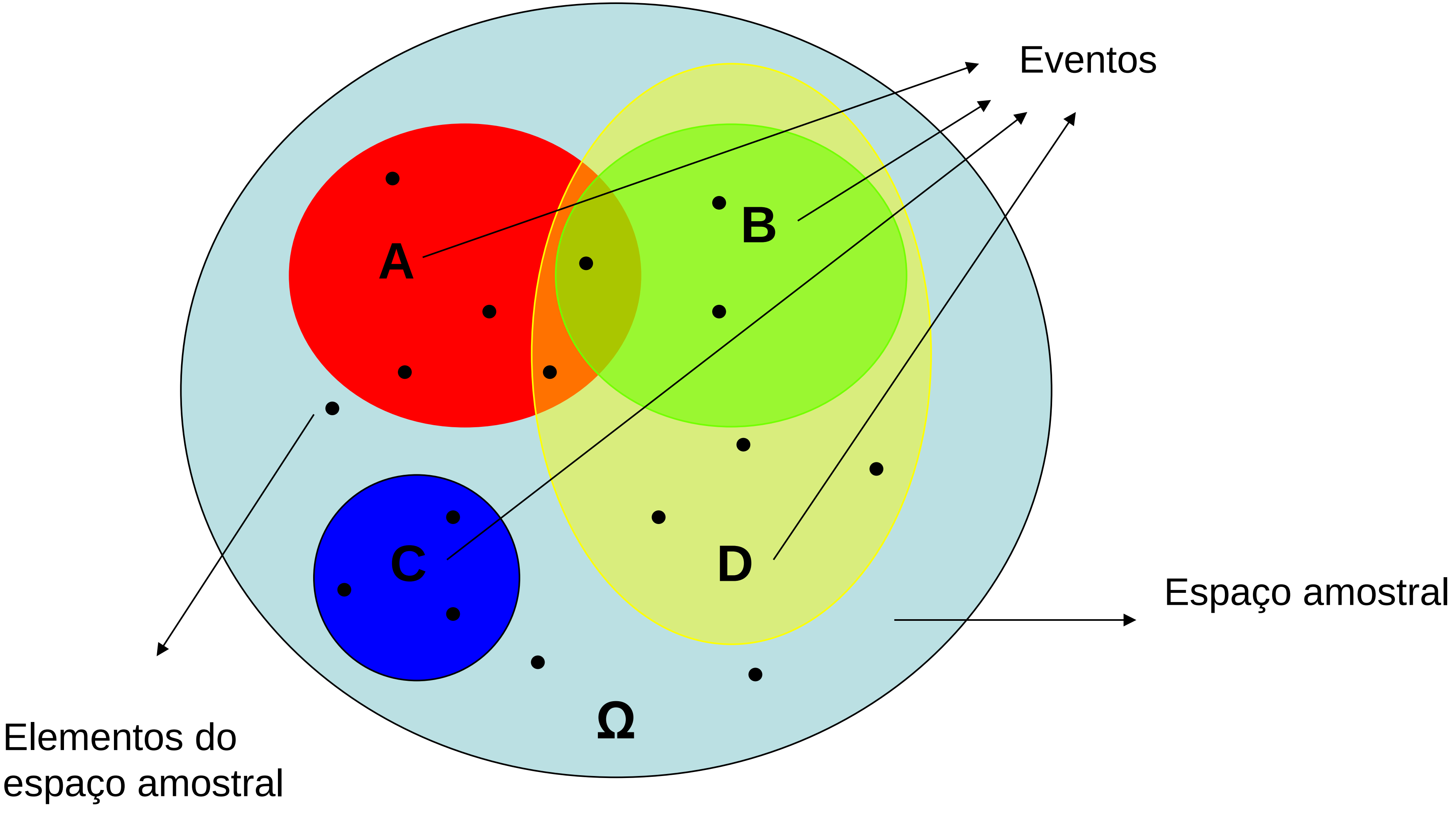
Conceitos da teoria dos conjuntos - REVISÃO

- Chamaremos de **espaço amostral** o conjunto de todos os possíveis resultados de um certo fenômeno aleatório. Representaremos pela letra grega Ω.

- Subconjuntos de Ω são denominados **eventos** e representados por letras maíusculas (A, B, C, …).

- Um subconjunto vazio do espaço amostral é representado por ∅ e denominado evento impossível.

Espaço amostral



Espaço Amostral

1) Jogue uma moeda 4 vezes e observe o número de caras.

2) Jogue uma moeda 4 vezes e observe a sequência obtida de caras e coroas.

Espaço Amostral

1) Jogue uma moeda 4 vezes e observe o número de caras.

$$\Omega_1=\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

1) Jogue uma moeda 4 vezes e observe a sequência obtida de caras e coroas.

Espaço Amostral

1) Jogue uma moeda 4 vezes e observe o número de caras.

$$\Omega_1=\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

2) Jogue uma moeda 4 vezes e observe a sequência obtida de caras e coroas.

Ω_2={todas as sequências possíveis da forma a_1, a_2, a_3, a_4}, onde cada a_i = Cara ou Coroa, conforme apareça cara ou coroa na i-ésima jogada.

Espaço Amostral

3) Uma lâmpada é fabricada. Em seguida é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar.

$$\Omega_3=\{t \mid t \geq 0\}$$

Espaço Amostral

4) Um lote de 10 peças contem 3 defeituosas. As peças são retiradas uma a uma (sem reposição) até que a última peça defeituosa seja encontrada. O número total de peças retiradas do lote é contado.

5) Peças são fabricadas até que 10 peças perfeitas sejam produzidas. O número total de peças fabricadas é contado.

Espaço Amostral

4) Um lote de 10 peças contem 3 defeituosas. As peças são retiradas uma a uma (sem reposição) até que a última peça defeituosa seja encontrada. O número total de peças retiradas do lote é contado.

$$\Omega_4=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

5) Peças são fabricadas até que 10 peças perfeitas sejam produzidas. O número total de peças fabricadas é contado.

Espaço Amostral

4) Um lote de 10 peças contem 3 defeituosas. As peças são retiradas uma a uma (sem reposição) até que a última peça defeituosa seja encontrada. O número total de peças retiradas do lote é contado.

$$\Omega_4=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

5) Peças são fabricadas até que 10 peças perfeitas sejam produzidas. O número total de peças fabricadas é contado.

$$\Omega_5=\{10, 11, 12, ...\}$$

Espaço Amostral

- Precisamos ter uma ideia bem clara do que estamos mensurando ou observando (Diferença entre Exemplo 1 e 2).

- O resultado de um experimento não é necessariamente um número. Exemplo 2 temos uma sequência de caras e coroas. Poderemos ter um vetor, uma função.

- Número de resultados de um espaço amostral:
  - Exemplos 1, 2 e 4: finitos
  - Exemplo 3: infinito não numerável
  - Exemplo 5: infinito numerável

Eventos

1) Jogue uma moeda 4 vezes e observe o número de caras.

2) Jogue uma moeda 4 vezes e observe a sequência obtida de caras e coroas.

3) Uma lâmpada é fabricada. Em seguida é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar.

Eventos

1) Jogue uma moeda 4 vezes e observe o número de caras.

A_1:{2}; ou seja, ocorrem duas caras.

2) Jogue uma moeda 4 vezes e observe a sequência obtida de caras e coroas.

A_2: {CCCC, CCCc, CCcC, CcCC, cCCC}; ocorrência de mais caras (C) do que coroas (c).

3) Uma lâmpada é fabricada. Em seguida é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar.

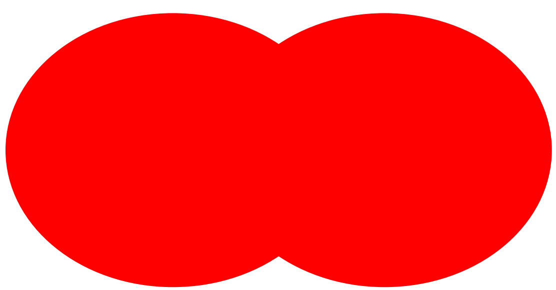
A_3: $\{t \mid t < 3\}$; a lâmpada queima em menos de 3 horas.

Propriedades dos eventos

Considere dois eventos quaisquer A e B, temos as seguintes operações elementares:

- A **união** de dois eventos A e B, denotada por A∪B representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos A **ou** B.

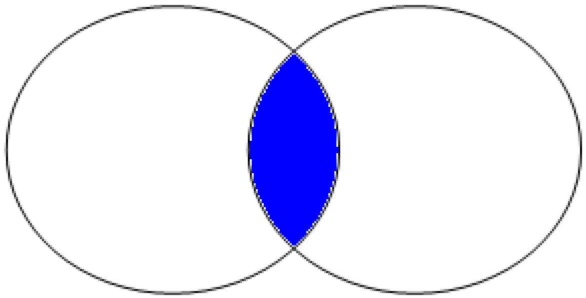
$$A \cup B = \{x | x \in A \; ou \; x \in B\}$$



Propriedades dos eventos

- A **interseção** do evento A com o B, denotada por $A \cap B$, é a ocorrência simultânea de A **e** B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \; e \; x \in B\}$$

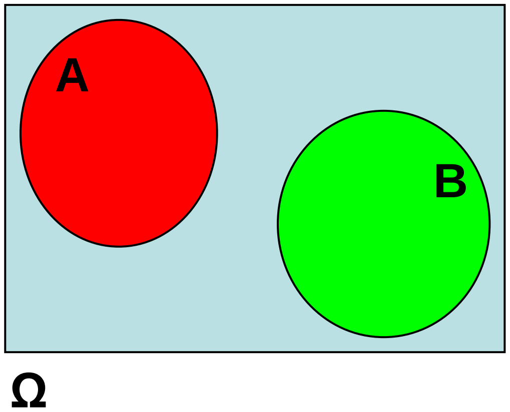


- O **complemento** de A, escrito como A^c, é o conjunto de todos os elementos que não estão em A:

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$

Propriedades dos eventos

- Dois eventos A e B são **disjuntos** ou **mutuamente exclusivos** quanto não têm elementos em comum. Isto é $A \cap B = \emptyset$.



Propriedades dos eventos

- Operações com conjuntos:
- Para três eventos A, B e C, definidos em um espaço amostral Ω:
- Comutativa $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ B \cap A = A \cap B; \end{cases}$
- Associativa $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \end{cases}$
- Distributiva $\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \end{cases}$
- Lei DeMorgan $\begin{cases} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{cases}$

O que é probabilidade?

- **Probabilidade** é uma afirmação numérica sobre a possibilidade de que algo ocorra, quantifica o grau de incerteza dos eventos, variando de 0 a 1 ou 0% a 100%.

- Formalmente, **probabilidade** é uma função P(.) que atribui valores numéricos aos eventos de um espaço amostral:

Função probabilidade

Def: Uma função P(.) é denominada **probabilidade** se satisfaz as condições:

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall\ A \subset \Omega;$
2. $P(\Omega)=1;$
3. Para $A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots$ eventos disjuntos dois a dois:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

Como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

- Existem algumas maneiras:

1. Interpretação frequencista:

Observando as diversas repetições do fenômeno em que ocorre a variável de interesse, podemos anotar o número de ocorrências de cada valor dessa variável, ou seja, obtemos as probabilidades através das frequências de ocorrências.

Para um número grande de realizações (n) a frequência relativa pode ser usada como uma medida de probabilidade.

Ou seja,

$$fr_i(A) = \frac{\text{número de repetições em que ocorre A}}{n} = \frac{f_i}{n}$$

2. Probabilidade teórica P(A):

Atribuir as probabilidades baseando-se em características teóricas da realização do fenômeno.

As probabilidades podem ser calculadas simplesmente contando o número de resultados no evento.

Suponha que $\Omega=\{s_1,..., s_N\}$ é um espaço amostral finito.

Dizer que todos os resultados são igualmente prováveis significa que:

$$P(\{s_1\})={}^1/_N$$

para cada resultado s_i.

2. Probabilidade teórica P(A):

Então, para qualquer evento A:

$$P(A) = \sum_{s_i \in A} \frac{1}{N} = \frac{\#\ de\ elementos\ de\ A}{\#\ de\ elementos\ de\ S}$$

Quando n cresce: fr(A) $\cong$ P(A)

2. Probabilidade subjetiva:

Baseada no julgamento pessoal, acúmulo de conhecimento e experiência. Assume-se o conhecimento existente “a priori” para se atribuir probabilidade ao evento A.

Exemplo

Qual é a probabilidade do Brasil vencer o México nas oitavas de final, na Copa de 2018?

Probabilidade frequencista:

Sabendo que o Brasil venceu o México em 23 jogos e o México saiu vencedor em 10.

A probabilidade do Brasil vencer o México é 23/33 = 0,70 = 70%

Brasil – México	
Brasil	23 vitória(s), 73 gol(s)
México	10 vitória(s), 36 gol(s)
Empates	7
Total de jogos	40
Total de gols	109

Exemplo

Probabilidade teórica:

Considerando que os times têm condições de jogo equiprováveis, a probabilidade do Brasil vencer o México nas oitavas de final é ½ = 0,50 = 50%

Probabilidade subjetiva:

Considerando que a campanha do Brasil na copa foi melhor que a campanha do México, ou seja, o Brasil não perdeu nenhum jogo e o México perdeu 1, a probabilidade do Brasil vencer a partida é maior.

Entrevista Rádio Ufscar

- http://www.radio.ufscar.br/noticias-ufscar/estatistico-da-ufscar-revela-qual-selecao-e-a-favorita-para-ganhar-a-copa-do-mundo/

- http://www.previsaoesportiva.com.br/

Probabilidade de avançar na competição

Fonte: http://www.previsaoesportiva.com.br/

Seleção	Campeão	Final	Semi	Quartas	Oitavas
Bélgica	26.86	39.15	54.58	78.89	100.00
Inglaterra	11.85	23.73	40.47	67.48	100.00
Espanha	9.97	20.42	42.07	69.41	99.79
Portugal	9.89	19.61	39.31	63.67	92.05
Croácia	7.29	16.12	34.45	65.55	100.00
Brasil	6.42	12.81	22.87	49.73	84.86
França	6.20	13.89	33.24	66.49	100.00
Suiça	5.49	12.23	23.61	55.74	99.18
Alemanha	5.27	10.68	19.31	43.57	83.40

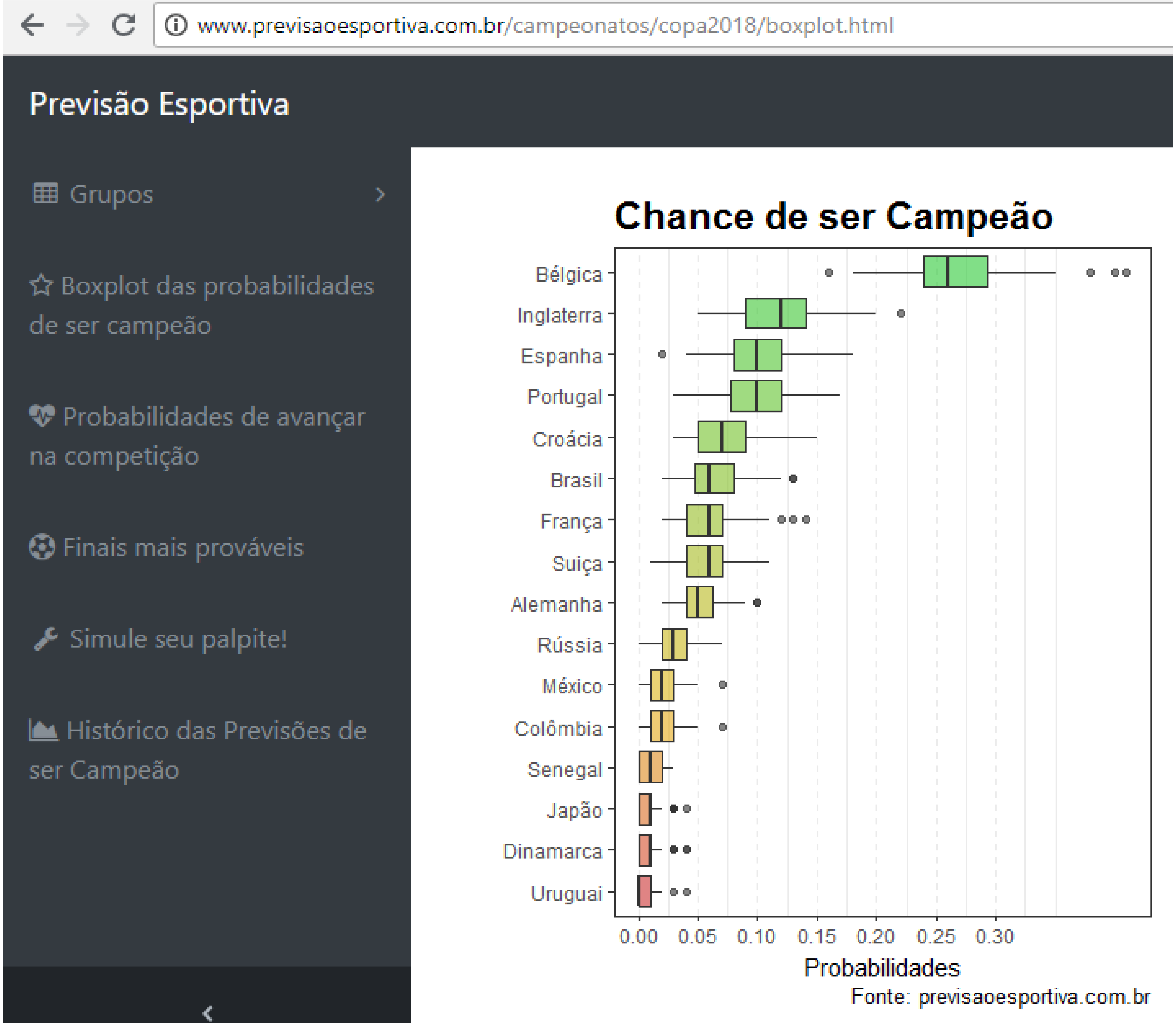
Cinco finais mais prováveis

- Fonte: http://www.previsaoesportiva.com.br/

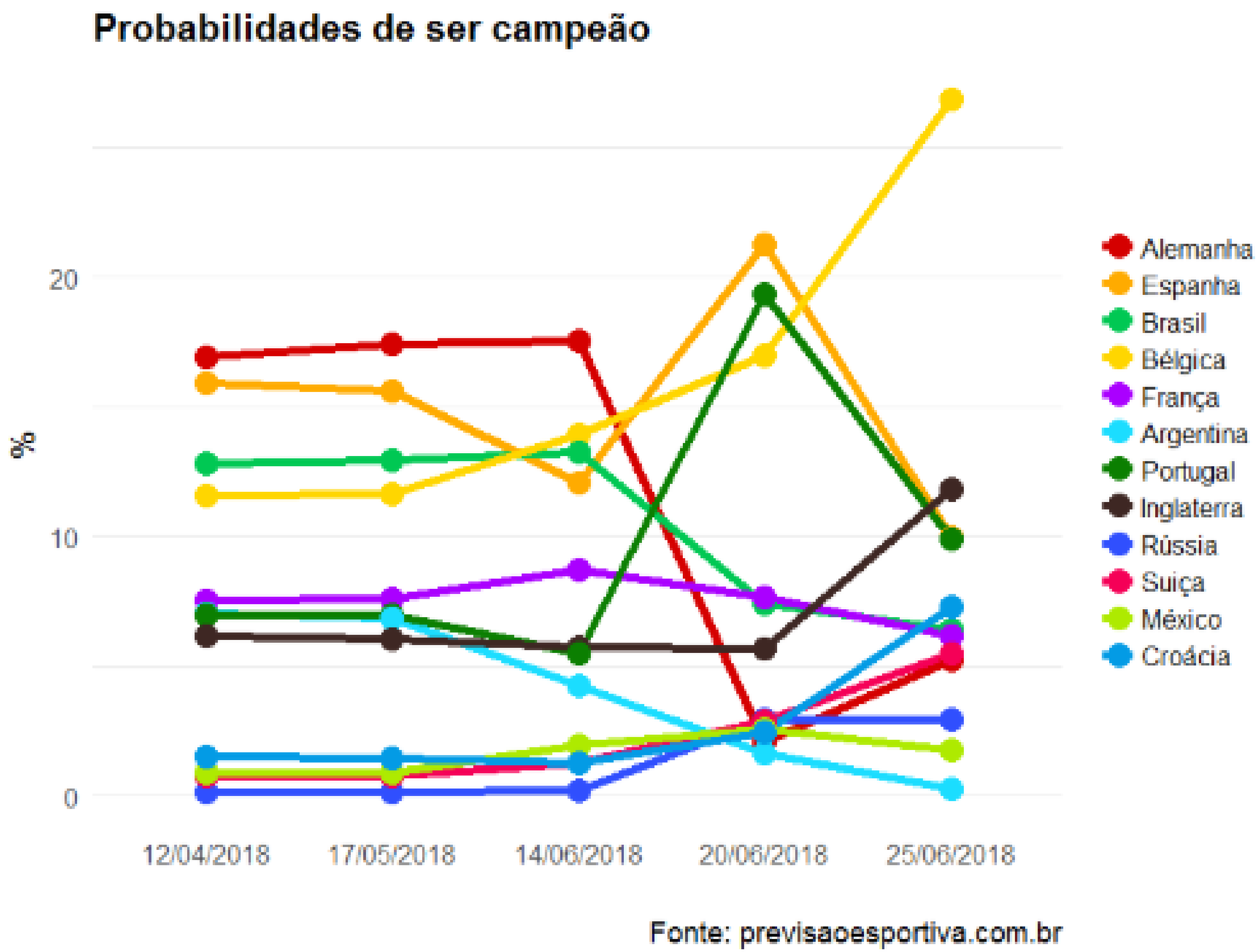
Probabilidades das cinco finais mais prováveis

Ordem	Seleção		Seleção		Probabilidade
1	Bélgica		Inglaterra		0.0914
2	Croácia		Bélgica		0.0471
3	Espanha		Bélgica		0.0462
4	Portugal		Bélgica		0.0413
5	Portugal		Espanha		0.0399

Showing 1 to 5 of 5 entries


www.previsaoesportiva.com.br/campeonatos/copa2018/boxplot.html
Previsão Esportiva
Grupos
Boxplot das probabilidades de ser campeão
Probabilidades de avançar na competição
Finais mais prováveis
Simule seu palpite!
Histórico das Previsões de ser Campeão
Chance de ser Campeão
Bélgica
Inglaterra
Espanha
Portugal
Croácia
Brasil
França
Suiça
Alemanha
Rússia
México
Colômbia
Senegal
Japão
Dinamarca
Uruguai
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
Probabilidades
Fonte: previsaoesportiva.com.br

Histórico da probabilidade de ser campeão



Teoremas probabilidade

- Considere os eventos U e V dois eventos quaisquer, então:

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V)$$

- Se U e V forem eventos mutuamente exclusivos ou disjuntos, tem-se:

$$P(U \cup V) = P(U) + P(V)$$

Teoremas probabilidade

- Se $\emptyset$ for o conjunto vazio, então:

$$P(\emptyset) = 0$$

- Se A^c for o evento complementar de A, então:

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Exemplo

- Um certo tipo de motor elétrico falha se ocorrer uma das seguintes situações:
  - emperramento dos mancais,
  - queima dos enrolamentos,
  - desgaste das escovas.
- Suponha que o emperramento seja duas vezes mais provável do que a queima e esta sendo quatro vezes mais provável do que a desgastes das escovas.

- Qual será a probabilidade de que a falha seja devida a cada uma dessas circunstancias?

- Sejam:
  - E = Emperramento dos mancais.
  - Q = Queima dos enrolamentos.
  - D = Desgastes das escovas.
- Então:

$$P(E) = 2*P(Q);$$

$$P(Q) = 4*P(D);$$

$$P(\Omega)=1$$

$$P(E)+P(Q)+P(D) = 1$$

$$2(4P(D))+4P(D)+P(D) = 1$$

$$P(D) = 1/13$$

$$P(Q) = 4/13; \quad P(E)=8/13$$

Mega Sena

- O jogo da mega sena consiste em escolher 6 dezenas entre 60. O jogador pode marcar num cartão de 6 a 15 dezenas. Os custos (em reais) de cada jogo estão relacionados na tabela:

Dezenas	Custo
6	3,50
7	24,50
8	98,00
9	294,00
10	735,00
11	1617,00
12	3234,00
13	6006,00
14	10510,50
15	17517,50

- Temos, ao todo $\binom{60}{6} = 50.063.860$ possibilidades.
- Qual é a probabilidade de ganhar o prêmio máximo?
- Porque o jogo com 7 dezenas custa R$ 24,50?

- Resposta 1: A probabilidade de ganhar o prêmio máximo é $\dfrac{1}{\binom{60}{6}}$, ou seja, uma

chance em 50 milhões.

- Resposta 2: Porque com 7 dezenas podemos formar $\binom{7}{6} = 7$ jogos de 7 dezenas.
- Ou seja, fazer um jogo com 7 dezenas ou 7 jogos com 6 dezenas são ações equiprováveis (equivalentes em termo de probabilidade ganhar).

Exercício

- Qual é a probabilidade do Brasil vencer a Copa do Mundo de 2018?

- Use a interpretação que achar mais conveniente (frequencista, teórica ou subjetiva)

Exercício

- Na tabela temos dados referentes a estudantes matriculados em quatro cursos de uma universidade no ano passado:

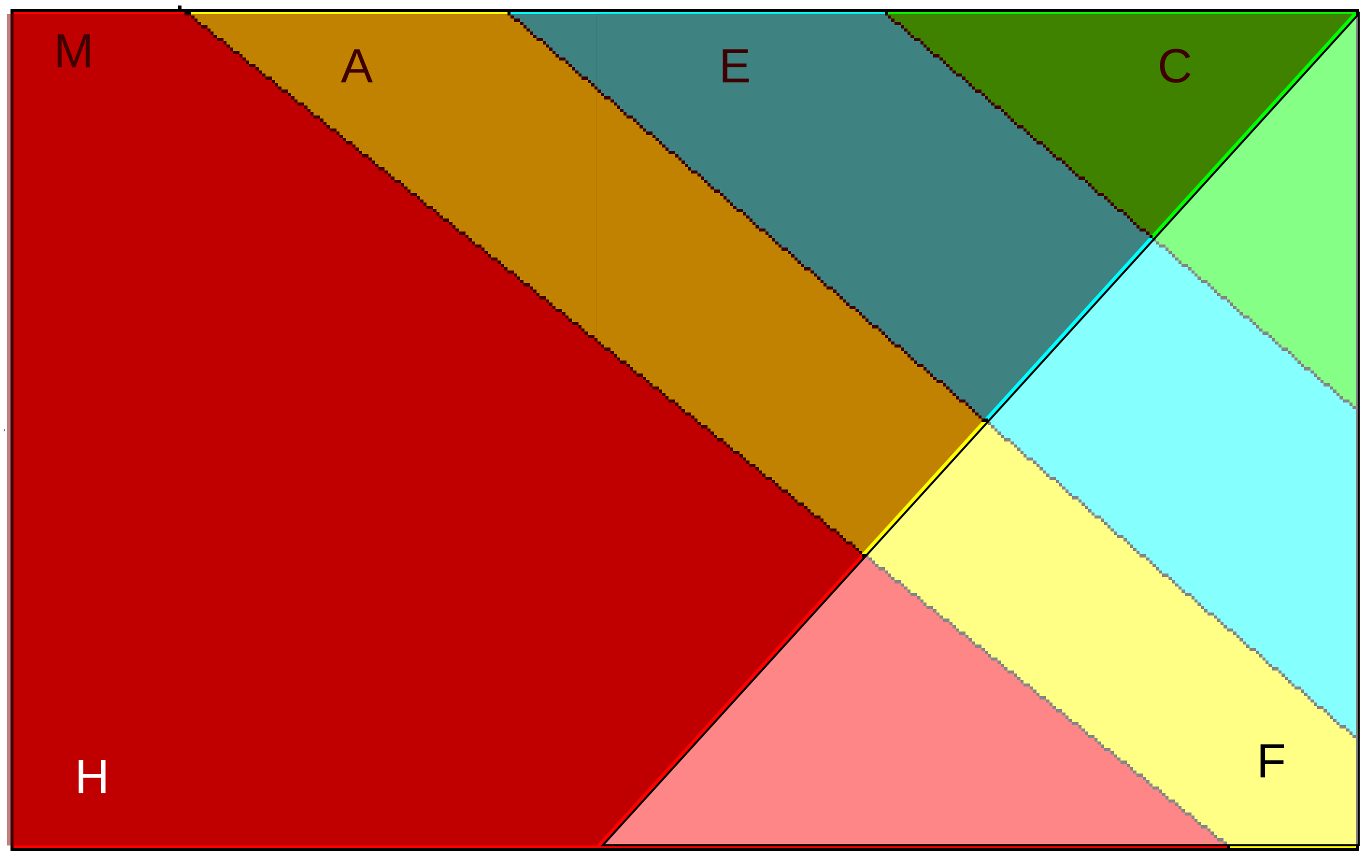
Curso \ Sexo	Homens (H)	Mulheres (F)	Total (cursos)
Matemática Pura (M)	70	40	110
Matemática Aplicada (A)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C.)	20	10	30
Total (sexo)	115	85	200

- Considere M o evento de escolher ao acaso um estudante e ele estar matriculado no curso de matemática pura.

1. Descreva graficamente o espaço amostral.
2. Qual a probabilidade de escolher um estudante matriculado no curso de matemática pura? ($P(M)$?)
3. Qual a probabilidade do estudante ser do sexo masculino? ($P(H)$?)
4. Qual a probabilidade de um estudante ser homem e estar matriculado no curso matemática aplicada? ($P(A \cap H)$?)
5. Qual a probabilidade de um estudante estar matriculado em matemática aplicada ou ser homem? ($P(A \cup H)$?)

Respostas

1. Descrever o espaço amostral:



2. $P(M)$?

$$P(M)=110/200$$

3. $P(H)$?

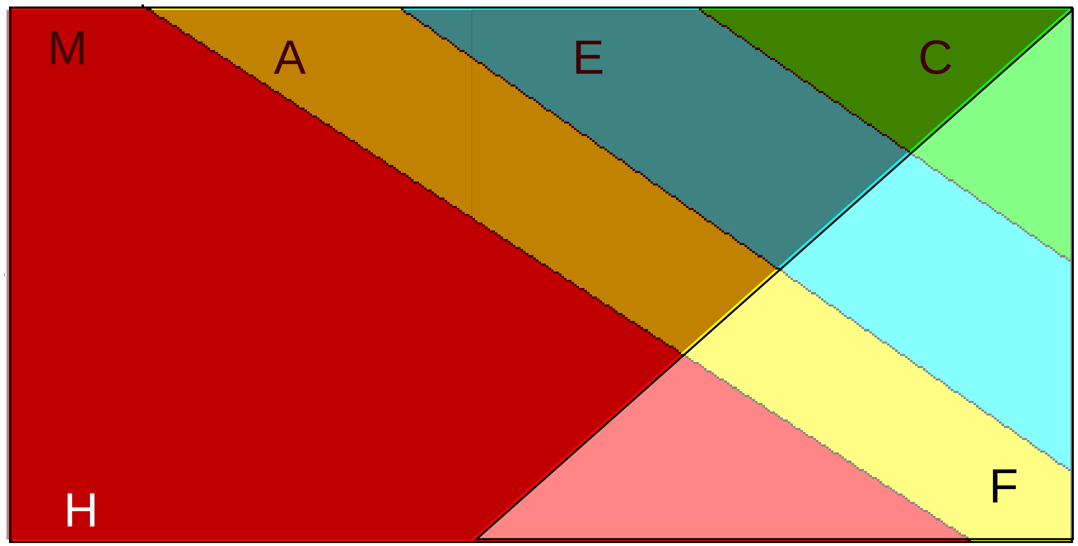
$$P(H)=115/200$$

4. $P(A \cap H)$?

$$P(A \cap H)=15/200$$

Curso \ Sexo	Homens (H)	Mulheres (F)	Total (cursos)
Matemática Pura (M)	70	40	110
Matemática Aplicada (A)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C.)	20	10	30
Total (sexo)	115	85	200

5. $P(A \cup H)$?



$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H)$$

$$= 30/200 + 115/200 - 15/200$$

$$= 130/200$$

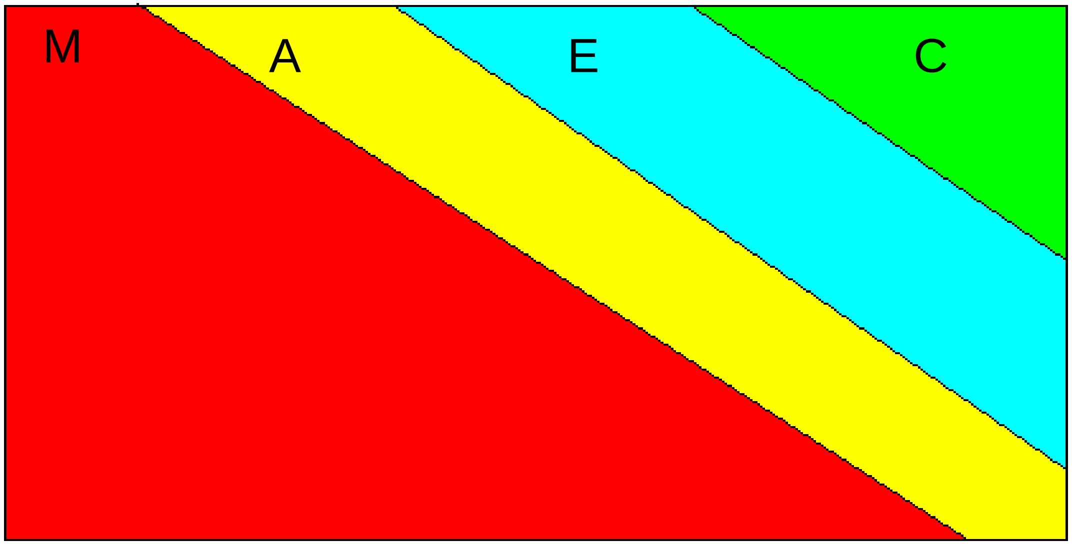
- Considerando agora a união dos eventos A e C:

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$

$= 30/200 + 30/200 - 0$

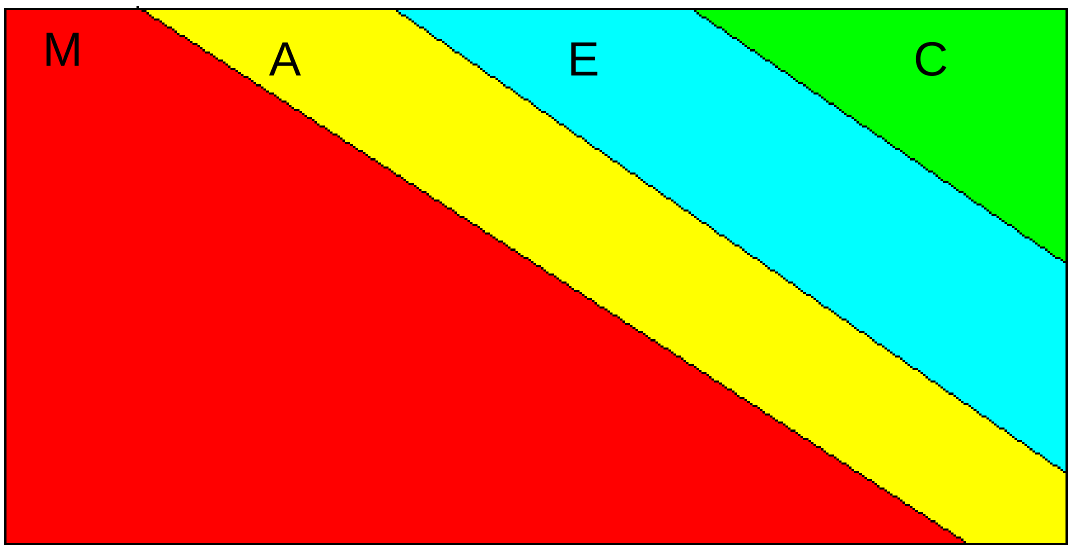
$= 60/200$

Os eventos A e C são disjuntos ou mutuamente exclusivos.



Evento complementar

- Suponha agora que queremos calcular a probabilidade do estudante NÃO estar matriculado no curso da computação:



- $P(C^c) = P(\Omega) - P(C) = 1 - P(C) = 1 - 30/200 = 170/200$

Exercício

- Considere o lançamento de dois dados. Considere o evento A = soma dos números obtidos igual a 9 e o evento B = número no primeiro dado maior ou igual a 4.

- Enumere os elementos de A e B.
- Obtenha de $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c.
- Obtenha as probabilidades do item anterior.

Exercício

Dois dados são jogados e sua soma é anotada.

1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Detemine a probabilidade de que a soma seja 4. 3/36 = 1/12 = 0,083

Determine a probabilidade de que a soma seja 11. 2/36 = 1/18 = 0,056

Determine a probabilidade de que a soma seja 4 ou 11. (3+2)/36 = 0,139